2020 军队文职数学 1 专业小试牛刀

1、设 $f(x)=u(x)+v(x)$，$g(x)=u(x)-v(x)$，并设 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)$ 都不存在，下列论断正确的是（　　）。

A.若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必存在

B.若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必不存在

C.若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必不存在

D.若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 必存在

2、函数 $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+6x+1$ 的图形在点 $(0,1)$ 处的切线与 x 轴交点的坐标是（　　）。

A. $(-1,0)$

B. $\left(-\frac{1}{6},0\right)$

C. $(1,0)$

D. $\left(\frac{1}{6},0\right)$

3、设 $f(x)$ 是以 l 为周期的周期函数，则 $\int_{a+kl}^{a+(k+1)l}f(x)dx$ 之值（　　）。

A.仅与 a 有关

B.仅与 a 无关

C.与 a 及 k 都无关

D.与 a 及 k 都有关

4、函数 $z=x^3+y^3-3x^2-3y^2$ 的极小值点是（　　）。

A. $(0,0)$

B. $(2,2)$

C. $(0,2)$

D. $(2,0)$

5、设平面区域 D：$(x-2)^2+(y-1)^2\le 1$，若比较 $I_1=\iint\limits_D (x+y)^2\,d\sigma$ 与 $I_2=\iint\limits_D (x+y)^3\,d\sigma$ 的大小，则有（　　）。

A. $I_1=I_2$

B. $I_1>I_2$

C. $I_1<I_2$

D.不能比较

6、设 L：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，则曲线 $\oint_C \frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$（　　）。

A.与 L 的取向无关，与 a,b 的值有关

B.与 L 的取向无关，与 a,b 的值无关

C.与 L 的取向有关，与 a,b 的值有关

A、D.与 L 的取向有关，与 a,b 的值无关

7、下列命题中正确的是（　　）。

A.若 $u_n<v_n\ (n=1,2,3,\cdots)$，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n\le\sum_{n=1}^{\infty}v_n$

B.若 $u_n<v_n\ (n=1,2,3,\cdots)$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

C.若 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛

D.若 $w_n<u_n<v_n\ (n=1,2,3,\cdots)$，且 $\sum_{n=1}^{\infty}w_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收

8、微分方程 $y''+2y'+2y=e^{-x}\sin x$ 的特解形式为（　　）。

A. $e^{-x}\left(A\cos x+B\sin x\right)$

B. $e^{-x}\left(A\cos x+Bx\sin x\right)$

C. $xe^{-x}\left(A\cos x+B\sin x\right)$

D. $e^{-x}\left(Ax\cos x+B\sin x\right)$

9、设 $\boldsymbol{A}$ 是三阶矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是四阶矩阵，且 $|\boldsymbol{A}|=2$，$|\boldsymbol{B}|=6$，$\left|-\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \\ & 2\boldsymbol{B}^{T}\end{pmatrix}\right|$ 为（　　）。

A.24

B.-24

C.48

D.-48

10、设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶可逆矩阵，则下列等式中，不一定成立的是（　　）。

A. $\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{2}=\boldsymbol{A}^{2}+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1}+\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{2}$

B. $\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{T}\right)^{2}=\boldsymbol{A}^{2}+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{T}+\left(\boldsymbol{A}^{T}\right)^{2}$

C. $\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{*}\right)^{2}=\boldsymbol{A}^{2}+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}+\left(\boldsymbol{A}^{*}\right)^{2}$

D. $\left(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}\right)^{2}=\boldsymbol{A}^{2}+2\boldsymbol{A}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^{2}$

11、设矩阵 $\boldsymbol{A}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)$ 经行初等变换为矩阵 $\boldsymbol{B}=\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\right)$，且 α_1，α_2，α_3 线性无关，α_1，α_2，α_3，α_4 线性相关，则（　　）。

A. β_4 不能由 β_1，β_2，β_3 线性表示

B. β_4 能由 β_1，β_2，β_3 线性表示，但表示法不唯一

C. β_4 能由 β_1，β_2，β_3 线性表示，且表示法唯一

D. β_4 能否由 β_1，β_2，β_3 线性表示不能确定

12、设 α_1，α_2，α_3，α_4 为四维非零列向量组，令 $\boldsymbol{A}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\right)$，$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $\boldsymbol{X}=k\left(0,-1,3,0\right)^{T}$，则 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{X}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系为（　　）。

A. α_1，α_3

B. α_2，α_3，α_4

C. α_1，α_2，α_4

D. α_2，α_4

13、设 $\boldsymbol{A}$ 为三阶矩阵，方程组 $\boldsymbol{AX}=\mathbf{0}$ 的基础解系为 α_1，α_2，又 $\lambda=-2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值，其对应的特征向量为 α_3，下列向量中是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量的是（　　）。

A. $\alpha_1+\alpha_3$

B. $3\alpha_3-\alpha_1$

C. $\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$

D. $2\alpha_1-3\alpha_2$

14、设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵，下列命题错误的是（　　）。

A.若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，则 -1 一定是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值

B.若 $r(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})<n$，则 -1 一定是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值

C.若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和为 -1，则 -1 一定是矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值

D.若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 的特征值之积小于零，则 -1 一定是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值

15、下列说法正确的是（　　）。

A.任一个二次型的标准形是唯一的

B.若两个二次型的标准形相同，则两个二次型对应的矩阵的特征值相同

C.若一个二次型的标准形系数中没有负数，则该二次型为正定二次型

D.二次型的标准形不唯一，但规范形是唯一的

16、设 (X,Y) 服从二维正态分布，则下列说法不正确的（　　）。

A. X,Y 一定相互独立

B. X,Y 的任意非零线性组合 l_1X+l_2Y 服从正态分布

C. X,Y 都服从正态分布

D. $\rho=0$ 时，X,Y 相互独立

17、设随机变量 $X\sim U[0,2]$，$Y=X^2$，则 X,Y （　　）。

A.相关且相互独立

B.不相互独立但不相关

C.不相关且相互独立

D.相关但不相互独立

18、设 $X\sim t(2)$，则 $\frac{1}{X^2}$ 服从的分布为（　　）。

A. $\chi^2(2)$

B. $F(2,1)$

C. $F(1,2)$

D. $\chi^2(4)$

19、设随机变量 $X\sim F(m,m)$，令 $p=P(X\le 1)$，$q=P(X\ge 1)$，则（　　）。

A. $p<q$

B. $p>q$

C. $p=q$

D. p,q 的大小与自由度 m 有关

20、设 $X_1,X_2,\cdots,X_8$ 是来自总体 $N(2,1)$ 的简单随机样本，则统计量

$$Y=\frac{2(X_1+X_2+X_3-6)}{\sqrt{3(X_4+X_5-4)^2+2(X_6+X_7+X_8-6)^2}}$$ 服从（　　）。

A. $\chi^2(2)$

B. $\chi^2(3)$

C. $t(2)$

D. $t(3)$

2020 军队文职数学 1 专业小试牛刀（解析）

1、【答案】C

【解析】令 $u(x)=\frac{2}{x}$，$v(x)=\frac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时可排除 A；令 $u(x)=v(x)=\frac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时可排除 B；令 $u(x)=\frac{1}{x}$，$v(x)=-\frac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时可排除 D。

2、【答案】B

【解析】因为 $f'(x)=x^2+x+6$，所以 $f'(0)=6$.故过 $(0,1)$ 的切线方程为 $y-1=6x$，因此与 x 轴的交点为 $\left(-\frac{1}{6},0\right)$。

3、【答案】C

【解析】因为 $f(x)$ 是以 l 为周期的周期函数，所以 $\int_{a+kl}^{a+(k+1)l} f(x)dx=\int_{kl}^{(k+l)l} f(x)dx=\int_0^l f(x)dx$，故此积分与 a 及 k 都无关。

4、【答案】B

【解析】由 $\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-6x=0$ 和 $\frac{\partial x}{\partial y}=3y^2-6y=0$，可得到 4 个驻点 $(0,0)$，$(2,2)$，$(0,2)$ 和 $(2,0)$。$A=\frac{\partial^2 z}{\partial^2 x}=6x-6$，$B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$，$C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y-6$，在 $(0,2)$ 点和 $(2,0)$ 点，均有 $AC-B^2<0$，因而这两个点不是极值点。在 $(0,0)$ 点，$AC-B^2=36>0$，且 $A=-6<0$，所以 $(0,0)$ 点是极大值点。在 $(2,2)$ 点，$AC-B^2=36>0$，且 $A=12>0$，所以 $(2,2)$ 点是极小值点，故选 B。

5、【答案】C

【解析】由二重积分的比较性质，只需比较 D 上 $(x+y)^2$ 与 $(x+y)^3$ 的大小，即 $x+y$ 与 1 的大小。从几何的角度也就是考查圆域 D 与直线 $x+y=1$ 的位置关系。因积分域 D 的圆心 $(2,1)$ 到直线 $x+y=1$ 的距离 $d=\sqrt{2}>1$（1 为圆的半径），故闭域 D 在直线 $x+y=1$ 的上方，即当 $(x,y)\in D$ 时，有 $x+y>1$，从而在 D 上 $(x+y)^2<(x+y)^3$，则 $I_1<I_2$。

6、【答案】D

【解析】因 $P=\frac{-y}{x^2+y^2}$，$Q=\frac{x}{x^2+y^2}$，且 $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$，故在以 L 为边界的区域 D 内，有偏导数不存在的点 $(0,0)$，可取 C 为包含原点但含于 L 内部并与 L 同向的曲线，此刻在 L 于 C 所围区域 D_1 上应用格林公式，

$$\pm\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_{L+C^-}Pdx+Qdy$$

。

当 $L+C^-$ 为 D_1 正向闭曲线时，取“＋”号，否则取“－”号。因 D_1 上，$\frac{\partial Q}{\partial x}\equiv\frac{\partial P}{\partial y}$。

从而 $\iint_{D_1}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=0$ 即 $\oint_L\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\oint_C\frac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$。此积分与 C 的方向即 L 的方向有关，但与 a,b 无关。

7、【答案】D

【解析】因为 $w_n<u_n<v_n$，所以 $0<u_n-w_n<v_n-w_n$.又因为 $\sum_{n=1}^{\infty}w_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(v_n-w_n)$ 收敛，因而 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-w_n)$ 收敛.故 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。因为只有当级数收敛时，才能比较其和的大小，所以不能选 A；选项 B，C 将正项级数的结论用到了一般级数上，显然不对。例如取级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}\right)$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 可以说明 B 不对，取级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right]$ 就可以说明 C 不对。选 D。

8、【答案】C

【解析】特征方程 $r^2+2r+2=0$ 即 $(r+1)^2=-1$，特征根为 $r_{1,2}=-1\pm i$，

而 $\lambda\pm iw=-1\pm i$ 是特征根，特解 $y^*=xe^{-x}\left(A\cos x+B\sin x\right)$。

9、【答案】D

【解析】

$$\left|-\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \\ & 2\boldsymbol{B}^T\end{pmatrix}\right|=(-1)^7\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}^{-1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & 2\boldsymbol{B}^T\end{vmatrix}=-\frac{1}{|\boldsymbol{A}|}\left|2\boldsymbol{B}^T\right|=-\frac{1}{2}\times2^4\times6=-48$$

，选 D。

10、【答案】B

【解析】由矩阵乘法的分配律可知：

$(A+B)^2=(A+B)A+(A+B)B=A^2+BA+AB+B^2$，

因此，$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$ 的充要条件是 $BA=AB$，也即 A，B 的乘积可交换。由于 A 与 A^{-1}，A 与 A^* 以及 A 与 E 都是可变换的，故 A，C，D 中的等式都是成立的.故选 B。

11、【答案】C

【解析】因为 α_1，α_2，α_3 线性无关，而 α_1，α_2，α_3，α_4 线性相关，所以 α_4 可由 α_1，α_2，α_3 唯一线性表示，又 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ 经过有限次初等行变换化为 $B=(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$，所以方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\alpha_4$ 与 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=\beta_4$ 是同解方程组，因为方程组 $x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+x_3\alpha_3=\alpha_4$ 有唯一解，所以方程组 $x_1\beta_1+x_2\beta_2+x_3\beta_3=\beta_4$ 有唯一解，即 β_4 可由 β_1，β_2，β_3 唯一线性表示，选 C。

12、【答案】C

【解析】因为 $Ax=0$ 的基础解系只含一个线性无关的解向量。所以 $r(A)=3$，于是 $r(A^*)=1$。因为 $A^*A=|A|E=O$，所以 α_1，α_2，α_3，α_4 为 $A^*X=0$ 的解，又因为 $-\alpha_2+3\alpha_3=0$，所以 α_2，α_3 线性相关，从而 α_1，α_2，α_4 线性无关，即为 $A^*X=0$ 的一个基础解系，应选 C。

13、【答案】D

【解析】因为 $AX=0$ 有非零解，所以 $r(A)<n$，故 0 为矩阵 A 的特征值，α_1，α_2 为特征值 0 所对应的线性无关的特征向量，显然特征值 0 为二重特征值，若 $\alpha_1+\alpha_3$ 为属于特征值 λ_0 的特征向量，则有 $A(\alpha_1+\alpha_3)=\lambda_0(\alpha_1+\alpha_3)$，注意到 $A(\alpha_1+\alpha_3)=0\alpha_1-2\alpha_3=-2\alpha_3$，故 $-2\alpha_3=\lambda_0(\alpha_1+\alpha_3)$ 或 $\lambda_0\alpha_1+(\lambda_0+2)\alpha_3=0$，因为 α_1，α_3 线性无关，所以有 $\lambda_0=0$，$\lambda_0+2=0$，矛盾，故 $\alpha_1+\alpha_3$ 不是特征向量，同理可证 $3\alpha_3-\alpha_1$ 及 $\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$ 也不是特征向量，显然 $2\alpha_1-3\alpha_2$ 为特征值 0 对应的特征向量，

选 D。

14、【答案】A

【解析】B.若 $r(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})<n$，则 $|\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}|=0$，于是 -1 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值；C.若 $\boldsymbol{A}$ 的每行元素之和为 -1，则 $\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$，根据特征值特征向量的定义，$-1$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值；D.若 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵，$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}$，令 $\boldsymbol{A}\alpha=\lambda\alpha$（其中 $\alpha\neq\boldsymbol{0}$），则 $\alpha^T\boldsymbol{A}^T=\lambda\alpha^T$，于是 $\alpha^T\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A}\alpha=\lambda^2\alpha^T\alpha$，即 $(\lambda^2-1)\alpha^T\alpha=0$，而 $\alpha^T\alpha>0$，故 $\lambda^2=1$，再由特征值之积为负得 -1 为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值；A.若 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$，则 $\boldsymbol{A}^2\alpha=\alpha\Rightarrow\lambda^2=1\Rightarrow\lambda=1$ 或 $\lambda=-1$，选 A。

15、【答案】D

【解析】A.不对，如 $f=x_1x_2$，令 $\begin{cases}x_1=y_1-y_2\\x_2=y_1+y_2\end{cases}$，则 $f=y_1^2-y_2^2$；若令 $\begin{cases}x_1=y_1-3y_2\\x_2=y_1+3y_2\end{cases}$，则 $f=y_1^2-9y_2^2$；B.不对，两个二次型标准形相同只能说明两个二次型正、负惯性指数相同，不能得到其对应的矩阵的特征值相同；C.不对，若一个二次型标准形系数没有负数，只能说明其负惯性指数为 0，不能保证其正惯性指数为 n。

16、【答案】A

【解析】因为 (X,Y) 服从二维正态分布，所以 B，C，D 都是正确的，只有当 $\rho=0$ 时，X,Y 才相互独立，选 A。

17、【答案】D

【解析】由 $X\sim U[0,2]$，得 $f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2},0\le x\le 2\\0,\text{其他}\end{cases}$

$E(X)=1$，$E(Y)=E(X^2)=\dfrac{1}{2}\int_0^2x^2dx=\dfrac{4}{3}$，$E(XY)=E(X^3)=\dfrac{1}{2}\int_0^2x^3dx=2$，

因为 $E(XY)\neq E(X)E(Y)$，所以 X,Y 一定相关，故 X,Y 不独立，选 D。

18、【答案】B

【解析】因为 $X\sim t(2)$，所以存在 $U\sim N(0,1)$，$V\sim\chi^2(2)$，且 U,V 相互独立，

使得 $X=\dfrac{U}{\sqrt{\dfrac{V}{2}}}$，则 $\dfrac{1}{X^2}=\dfrac{V/2}{U^2}$，因为 $V\sim\chi^2(2)$，$U^2\sim\chi^2(1)$ 且 V,U^2 相互独立，所以 $\dfrac{1}{X^2}\sim F(2,1)$，选 B。

19、【答案】C

【解析】因为 $X\sim F(m,m)$，所以 $\dfrac{1}{X}\sim F(m,m)$，于是 $q=P(X\ge 1)=P\left(\dfrac{1}{X}\le 1\right)$，故 $p=q$，选 C。

20、【答案】C

【解析】$T=\dfrac{X_1+X_2+X_3-6}{\sqrt{3}}\sim N(0,1)$。

$\dfrac{X_4+X_5-4}{\sqrt{2}}\sim N(0,1)$，$\dfrac{X_6+X_7+X_8-6}{\sqrt{3}}\sim N(0,1)$，且它们相互独立，所以

$X=\left(\dfrac{X_4+X_5-4}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\dfrac{X_6+X_7+X_8-6}{\sqrt{3}}\right)^2\sim\chi^2(2)$，所以由 T 与 X 相互独立得，

$\dfrac{2(X_1+X_2+X_3-6)}{\sqrt{3(X_4+X_5-4)^2+2(X_6+X_7+X_8-6)^2}}=\dfrac{T}{\sqrt{X/2}}\sim t(2)$，因此本题选 C。